Библиографический список

1. Gray A. Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds // Tôhoku Math. J. 1976. V.28. №4. P. 601-612.

2. Rizza G.B. Varieta parakahleriane // Ann. Math., Pure and Appl. 1974. V. 98. №4. P. 47-61.

3. Sawaki S., Sekigawa K. Almost Hermitian manifolds with constant holomorphic sectional curvature // J. Differential Geom. 1974. V. 9. P. 123-134.

4. Vanhecke L. Almost Hermitian manifolds with J-invariant Riemann curvature tensor // Red. Semin. Math. Univ. e politecn. Torino, 1975-1977. V. 34. P. 487-498.

5. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1986. Т.18. С.25-72.

6. Банару М.Б. О почти эрмитовых структурах, индуцированных 3-векторными произведениями на 6-мерных подмногообразиях алгебры Кэли / Смоленский пединститут. Деп. в ВИНИТИ 14.05.1993. № 1283 - В93.

УДК 514.77

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АСИМПТОТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ПРОСТЕЙШИХ ПОЛНЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

И.Б.Барский

(Марийский государственный педагогический институт)

В работе рассматривается структура асимптотических сетей, некоторые необходимые и достаточные условия их глобальной правильности на отдельных классах простейших поверхностей с ограниченными производными, поведение характеристик на бесконечности и связь их образов с границей нормального образа поверхности.

§ 1. Основные понятия

Пусть односвязная простейшая гиперболическая поверхность F задана на всей плоскости xy уравнением $z=f(x,y)$ и имеет предельный конус $A(F)$. Тогда конус $A(F)$ имеет взаимно однозначное сферическое изображение $A^*(F)=\bar{F}^*$. Пусть кривая Ω^* – граница области $A^*(F)$, тогда Ω^* будет четырехугольником типа астроиды, который может выродиться в криволинейный треугольник со сторонами, обращенными выпуклостью вовнутрь, или двуугольник, состоящий из двух больших полуокружностей (теорема А.Л.Вернера [1]). Построение нормального образа поверхности будем выполнять как и в работе [2]. Понятие вогнутой опоры приводится в работе [3], а остальные понятия – в работе [4].

Определение. Предельным поворотом $\tilde{\theta}(L)$ непрерывного невырожденного векторного поля касательного вектора на ориентированной дуге L характеристики λ назовем предел, если он существует, приращения угловой функции $\tilde{\theta}(L)$ на промежутке $[a;b)$, где b может быть бесконечностью.

Мы будем рассматривать односвязные простейшие гиперболические поверхности F [1], заданные уравнением

$$z=z(x,y) \qquad (1)$$

удовлетворяющие условиям: поверхность F проектируется на плоскость x,y взаимно однозначно, гауссова кривизна $K<0$ и выполняется условие

$$z_x^2+z_y^2<+\infty. \qquad (2)$$

Как обычно будем обозначать $p=z_x$, $q=z_y$.

§2. Некоторые предложения по структуре асимптотической сети и углов нормального образа

Рассмотрим векторное поле касательного вектора к асимптотическим линиям λ^α поверхности F. В силу задания поверхности, будем, следуя Н.В.Ефимову [3], рассматривать проекции этих линий на плоскость x,y и, следовательно, рассматривать поле касательного вектора характеристик соответственно первого и второго семейства. Соблюдая терминологию и обозначения [4], обозначим эти семейства соответственно σ_1 и σ_2. Тогда вектор касательного направления к характеристикам будет иметь направление (dx, dy). Нормальный образ каждой характеристики в соответствующей точке будет иметь касательное направление (dp, dq).

Лемма 1. Поворот векторного поля касательного вектора характеристик простейших гиперболических поверхностей (1) равен повороту поля касательного вектора нормального образа.

Л е м м а 2. Предельный поворот, если он существует, векторного поля касательного вектора характеристик равен предельному повороту касательного вектора нормального образа.

З а м е ч а н и е 1. Говоря о предельном повороте кривой λ, мы будем иметь в виду два поворота: фиксируя точку $M_0(s_0)$, где $M_0(s_0)\in\lambda$, $s_0\in(a,b)$, мы будем двигаться к a $(s\to a)$ или к b $(s\to b)$, затем, меняя второе направление на противоположное, мы можем рассматривать и "общий" предельный поворот всей кривой λ. Итак, из контекста будет следовать, когда речь идет о части кривой λ, а когда рассматривается вся характеристика.

Т е о р е м а I. Если для обеих линий семейства характеристик λ_1 и λ_2 существуют предельные повороты, то их образ не может быть представлен в виде предельного асимптотического двуугольника, т.е. нормальные образы двух пересекающихся характеристик не могут сойтись в точке $A^*_\infty\in\partial F^*$ [4].

С л е д с т в и е I. Для данного класса поверхностей не существует двойной бесконечной точки [4].

Т е о р е м а 2. Если нормальные образы некоторого семейства $\{\lambda_1^{\alpha *}\}\subset\sigma_1^*$ входят в точку $A^*_\infty\in\partial F^*$ "пучком", то точка вхождения не может быть точкой A^*_∞, в которой существует вогнутая опора.

С л е д с т в и е 2. Если все линии $\lambda_1^{\alpha *}$ одного из семейств σ_1^* имеют предельный поворот, который непрерывно меняется от линии к линии, и все линии образа входят в точку A^*_∞, то необходимо точка A^*_∞ является особой точкой A^{i*}_∞ границы Γ^* образа F^* поверхности F, т.е. точкой, в которой не существует вогнутой опоры.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что мы нигде выше пока не предполагали правильности в целом сети. Но существенно то, что простейшие поверхности (I) должны иметь правильный конус.

Т е о р е м а 3. Если все линии каждого из семейств $\{\lambda_1^\alpha\}$ и $\{\lambda_2^\beta\}$ имеют непрерывно изменяющийся предельный поворот, и при этом линии их образов входят в каждую бесконечную точку A^{i*}_∞ "пучками", то существует ровно четыре точки, в которых не существует вогнутой опоры.

С л е д с т в и е 3. Невозможно вхождение образов характеристик в смежные особые точки A^{i*}_∞ границы Γ^*.

Т е о р е м а 4. Если любая линия произвольного семейства асимптотических имеет образом, например, λ_1^{i*}, входящую в точку A^{1*}_∞, и при этом окажется, что нормальные образы асимптотических входят в эту точку "пучком" с непрерывно изменяющимся предельным поворотом, то сеть асимптотических правильна в целом.

З а м е ч а н и е 3. Пример поверхности и вид сети приведен в [4].

Т е о р е м а 5 (Структура углов нормального образа). Не существует углов A^{i*}_∞ таких, чтобы два каких-либо смежных угла были одновременно тупыми.

С л е д с т в и е 4. Не существуют три тупых угла нормального образа.

Возможные структуры нормального образа поверхности (I):

- существуют два тупых угла, но тогда они могут быть только противоположными;
- существует один тупой угол;
- нормальный образ имеет вид прямоугольника;
- все углы острые.

З а м е ч а н и е 4. Пример острых углов приведен в [1], а примеры прямоугольников приводятся ниже.

§ 3. Структура асимптотической сети на одном классе простейших полных гиперболических поверхностей

В § 2 мы установили достаточные условия вхождения асимптотических линий семейств σ_1^* и σ_2^* в особые точки A^{i*}_∞ нормального образа ∂F^*. Соответствующую поверхность отнесем к классу $\mathcal{P}$. Пример из [4] показывает, что класс $\mathcal{P}$ не пуст.

Естественно выдвигается гипотеза: не будут ли для любой простейшей гиперболической поверхности с предельным конусом типа (I) все образы асимптотических линий обоих семейств σ_1^* и σ_2^* входить в особые точки нормального образа. Если бы мы это установили, то можно было бы дать и соответствующую геометрическую интерпретацию угловым точкам нормального образа. Однако в данном параграфе мы на одном подклассе простейших гиперболических поверхностей покажем неправильность данного суждения в общем случае. Более того, мы покажем, что существуют простейшие гиперболические поверхности с нормальным образом типа астроиды, для которых не существуют вообще ни одной характеристики, нормальный образ которой входил бы одним концом в одну из угловых точек $A^{i*}_\infty\in\partial F^*$.

Рассмотрим поверхности типа (I), имеющие вид

$$z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y). \tag{3}$$

Поверхность F принадлежит классу C^2. Пусть в соответствии с условиями задания поверхности

$$\lim_{x\to-\infty} z_x = p_1, \quad \lim_{x\to+\infty} z_x = p_2, \quad \lim_{y\to-\infty} z_y = q_1, \quad \lim_{y\to+\infty} z_y = q_2. \tag{4}$$

Л е м м а 3. Если в какой-либо точке X поверхности F $\varphi_{xx}(X)>0$, а $\psi_{yy}(X)<0$, то эти неравенства сохраняются для любой точки поверхности.

Пусть для определенности в каждой точке X поверхности F

$$\varphi_{xx}(X)>0, \quad \psi_{yy}(X)<0.$$

Т е о р е м а 6. Если образ λ^* характеристики λ входи в угловую точку A^{i*}_{∞}, то это возможно тогда, когда $|x|\to\infty$ и $|y|\to\infty$ одновременно.

Т е о р е м а 7. Угловые точки нормального образа поверхности (3) соответствуют следующим предельным значениям x и y: $A^{1*}_{\infty}(p_1,q_1)$, $A^{2*}_{\infty}(p_2,q_1)$, $A^{3*}_{\infty}(p_2,q_2)$, $A^{4*}_{\infty}(p_1,q_2)$.

Рассмотрим пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{x_0}^{x}\sqrt{\varphi_{tt}}\,dt, \qquad \lim_{x\to-\infty}\int_{x_0}^{x}\sqrt{\varphi_{tt}}\,dt; \tag{5}$$

$$\lim_{y\to+\infty}\int_{y_0}^{y}\sqrt{-\psi_{tt}}\,dt, \qquad \lim_{y\to-\infty}\int_{y_0}^{y}\sqrt{-\psi_{tt}}\,dt. \tag{6}$$

Т е о р е м а 8. Если один из пределов (5) конечен, а один из пределов (6) бесконечен, либо один из пределов (5) бесконечен, а один из пределов (6) конечен, то ни один из образов асимптотических $\lambda^{\alpha*}_i$ не входит ни в одну из угловых точек A^{i*}_{∞} нормального образа ∂F^*.

Т е о р е м а 9. Если существует такая характеристика $\lambda^1_1 \in \sigma_1$, что ее нормальный образ $\lambda^{1*}_1 \in \sigma^*_1$ входит в одну из угловых точек A^{i*}_{∞} и соответствующие два предела из (5) и (6) конечны, то эта характеристика – единственная, входящая в эту угловую точку.

Т е о р е м а 10. Для того, чтобы образы всех асимптотических, например, первого семейства $\lambda^{\alpha}_1 \in \sigma_1$ входили в одну угловую точку A^{i*}_{∞}, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие два предела из (5) и (6) были бесконечными.

Т е о р е м а 11. Если простейшая гиперболическая поверхность задана уравнением (3) и все пределы (5) и (6) бесконечны, то сеть асимптотических правильна в целом, а ее образы входят в угловые точки.

§ 4. Примеры, являющиеся иллюстрацией теорем 8 – 11

1. Поверхность F^1, заданная уравнением

$$z = x\,\mathrm{arctg}\,x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - \tfrac{1}{4}\ln \mathrm{ch}\,y.$$

2. Поверхность F^2, заданная уравнением

$$z = \ln \mathrm{ch}\,x - \ln \mathrm{ch}\,y.$$

3. Поверхность F^3, заданная уравнением

$$z = x\cdot\mathrm{arctg}\,x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) - y\,\mathrm{arctg}\,y + \tfrac{1}{2}\ln(1+y^2).$$

Библиографический список

1. В е р н е р А.Л. О внешней геометрии простейших полных поверхностей неположительной кривизны // Мат. сб. 1968. Т.75. № 1. С. 112-139.

2. Б а к е л ь м а н И.Я. К теории уравнений Монжа-Ампера // Вестн. ЛГУ. Мат., мех. 1958. № 1. С.25-38.

3. Е ф и м о в Н.В. Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны // Мат. сб. 1964. Т.64. № 2. С.286-320.

4. Б а р с к и й И.Б. Некоторые вопросы глобальной правильности сетей на простейших полных поверхностях отрицательной кривизны / Йошкар-Ол. гос. пед. ин-т. Йошкар-Ола, 1992. 14с. Деп. в ВИНИТИ 14.10.92, № 2970-В92.

УДК 514.7

АЛГЕБРА КЛИФФОРДА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ КАЛУЦЫ

М.П.Б у р л а к о в, В.В.П о к а з е е в

(Тольяттинский филиал Самарского гос. пед. института)

Настоящая статья посвящена изучению клиффордовой структуры, естественно возникающей в псевдоевклидовом пространстве M_5, снабженном метрической формой вида $Q(x,x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 + x_5^2$. Такое пространство впервые возникло в работе [1] и впоследствии использовалось в рамках попыток создания единой теории гравитации и электромагнетизма. Отметим, что гиперплоскость M_4